УДК 517.948

Л. Д. Менихес

К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теория регуляризуемости отображений возникла в связи с решением неустойчивых задач, которые часто встречаются в математике, так как к ним относятся интегральные уравнения первого рода, многие уравнения в частных производных, численное дифференцирование и другие задачи. В 1963 году А. Н. Тихонов [1, 2] предложил метод регуляризации для решения неустойчивых задач, которому В. А. Винокуров [3] придал необходимую общность, введя понятие регуляризуемости отображений. В. А. Винокурову [4] удалось найти критерий регуляризуемости в терминах бэровской классификации. Затем В. А. Винокуров, Л. Д. Менихес, Ю. И. Петунии, А. Н. Пличко [5–8] вывели теорию регуляризуемости на новый уровень, используя мощные методы теории двойственности банаховых пространств.

Рассмотрим некоторые определения.

Пусть X, Y – метрические пространства, f – отображение с областью определения $D \subset X$ и множеством значений в Y. Отображение f называется регуляризуемым, если существует семейство отображений $R_\delta \colon X \to Y$, $\delta \in (0, \delta_0)$, такое, что для любого $x \in D$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\rho(x,x') \leqslant \delta} \rho\Big(R_\delta(x'),\, f(x)\Big) = 0.$$

В этом случае семейство (R_δ) называется регуляризующим алгоритмом или регуляризатором для отображения f. Таким образом, регуляризуемость f означает существование регуляризатора для f.

Отображение f называется B-измеримым первого класса, если $D = X$ и прообраз любого открытого множества есть множество типа F_σ.

Пусть E – банахово пространство и $M \subset E^*$ – тотальное линейное подпространство в сопряженном пространстве.

Характеристикой $r(M)$ подпространства M называется нижняя грань чисел

$$\sup_{f \in M,\, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{||f||},$$

когда x пробегает единичную сферу в E. В [9] приводится еще несколько определений характеристики и показывается их эквивалентность. Для нас важно, что $\dfrac{1}{r(M)}$ равно верхней грани чисел $\|x\|$, где x пробегает замыкание единичного шара в E в топологии $\sigma(E, M)$. Если $A\colon E \to F$ – линейный инъективный непрерывный оператор, то $A^*F^* \subset E^*$ – тотальное подпространство и его характеристика $r(A^*F^*)$ может быть найдена следующим образом: $\dfrac{1}{r(A^*F^*)}$ – верхняя грань чисел $\|x\|$, когда x пробегает замыкание единичного шара в E по новой норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$.

Для исследования регуляризуемости линейных обратных задач, т. е. когда $f = A^{-1}$, где A – линейный инъективный непрерывный оператор, В. А. Винокуров, Ю. И. Петунин, А. Н. Пличко [5] нашли следующий критерий.

Теорема 1. *Отображение A^{-1} регуляризуемо тогда и только тогда, когда A^*F^* – подпространство ненулевой характеристики в E^*.*

С помощью этого критерия была исследована регуляризуемость многих неустойчивых задач. В частности, было доказано, что если E – квазирефлективное пространство, то A^{-1} регуляризуемо для любого A. Был доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, E_1 сепарабельно, E_2 рефлексивно, $A\colon E_1 \to E_2$, $B\colon E_2 \to E_3$ – линейные непрерывные инъективные операторы, A^{-1} регуляризуемо. Тогда $(BA)^{-1}$ регуляризуемо.*

Отсюда следует, что в классической ситуации $A\colon C(0,1) \to L_2(0,1)$, при условии инъективности продолжения по непрерывности $\overline{A}$ на $L_2(0,1)$, отображение A^{-1} регуляризуемо. Из этого результата можно сделать вывод, что при исследовании регуляризуемости полезно рассматривать продолженный оператор, в частности его ядро. Эти надежды оправдались. В данной работе содержится обзор результатов из работ автора [10–14]. Некоторые результаты доказываются в более общем виде; некоторые утверждения, принятые в указанных статьях без доказательства, доказаны. Полученные ранее отдельные результаты изложены с единых позиций.

Рассмотрим вначале обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть E_1, E_3 – банаховы пространства, E_2 – локально выпуклое полурефлексивное пространство, E_1 сепарабельно, $A\colon E_1 \to E_2$ и $B\colon E_2 \to E_3$ – линейные непрерывные операторы, $A^{-1}\big|_{A(E_1)}$ – B-измеримое отображение первого класса, $\ker B$ – конечномерное подпространство и $A(E_1) \bigcap \ker B = \{0\}$. Тогда отображение $(BA)^{-1}$ регуляризуемо.*

Доказательство. Пусть p – естественное отображение $p\colon E_2 \to E_2/\ker B$. Тогда оператор B можно представить в виде произведения $B = Cp$, где C – линейный непрерывный инъективный оператор, $C\colon E_2/\ker B \to E_3$. Известно, что фактор-пространство полурефлексивного пространства не всегда полурефлексивно, но замкнутое подпространство полурефлексивного пространства полурефлексивно. Поэтому $E_2/\ker B$ будет полурефлексивным пространством в силу конечномерности $\ker B$, так как тогда $\ker B$ дополняемо и $E_2/\ker B$ изоморфно дополнению. Отсюда и из инъективности C получаем

$$\overline{C^* E_3^*} = (E_2/\ker B)^*. \tag{1}$$

Здесь и далее в сопряженных пространствах рассматривается сильная топология. Далее, так как сопряженное к фактор-пространству $E_2/\ker B$ есть аннулятор ядра $\ker B$ и $\ker B$ конечномерно, то $p^*(E_2/\ker B)^*$ – подпространство конечной коразмерности в E_2^*.

Теперь из (1) следует

$$\overline{(BA)^* E_3^*} = \overline{(CpA)^* E_3^*} = \overline{A^* p^* C^* E_3^*} \supset A^* \overline{p^* C^* E_3^*} \supset$$

$$\supset A^* p^* \overline{C^* E_3^*} = A^* p^* (E_2/\ker B)^*. \tag{2}$$

Здесь мы использовали непрерывность сопряженных операторов в сильной топологии сопряженных пространств. B-измеримость первого класса $A^{-1}\big|_{A(E_1)}$ влечет ненулевую характеристику $A^* E_2^* \subset E_1^*$. Но из (2) следует, что подпространство $\overline{(BA)^* E_3^*} \subset E_1^*$ содержит образ при отображении A^* пространства конечной коразмерности в E_2^*, т. е. $\overline{(BA)^* E_3^*}$ содержит подпространство конечной коразмерности из $A^* E_2^*$. Так как тотальное подпространство конечного дефекта в подпространстве ненулевой характеристики также имеет ненулевую характеристику, характеристика $\overline{(BA)^* E_3^*}$ отлична от 0. Но тогда и $(BA)^* E_3^*$ имеет ненулевую характеристику, что влечет регуляризуемость отображения $(BA)^{-1}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим следующий метод построения подпространств в $C^*(0,1)$ с различной характеристикой.

Пусть дана последовательность положительных чисел (a_n). Построим по этой последовательности некоторые последовательности функций, определенных на промежутке $[0;1]$. Для этого введем следующие последовательности промежутков:

$$I_k^- = \left[\frac{2^k - 1}{2^k}; \frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}}\right), \quad I_k^+ = \left[\frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}}; \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}\right], \quad I_k = I_k^- \bigcup I_k^+,$$

$k = 1, 2, \ldots$, и следующие последовательности функций: $\alpha_k(t) = 0$ при $t \in [0;1] \setminus I_k^+$,

$$\alpha_k\left(\frac{2^{k+3}-5}{2^{k+3}}\right) = a_k,$$

$\alpha_k(t)$ линейна на промежутках

$$\left[\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}; \frac{2^{k+3}-5}{2^{k+3}}\right], \ \left[\frac{2^{k+3}-5}{2^{k+3}}; \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right]$$

и непрерывна на $[0;1]$; $\beta_k(t) = 0$ при $t \in [0;1] \setminus I_k^-$, линейна на I_k^-, непрерывна при $t = (2^k - 1)/2^k$ и

$$\lim_{t \to \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - 0} \beta_k(t) = 1;$$

$\gamma_{kn}(t) = 0$ при $t \in [0;1] \setminus I_k$, $\gamma_{kn}(t) = -\beta_k(t)$ при

$$t \in \left[\frac{2^k-1}{2^k}; \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - \frac{|I_k^-|}{n}\right],$$

где $|I_k^-|$ – длина промежутка I_k^-, $k, n = 1, 2, \ldots$,

$$\gamma_{kn}\left(\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}\right) = 1,$$

$\gamma_{kn}(t_k) = \dfrac{1}{a_k}\,\alpha_k(t_k)$, где t_k – меньший из двух корней уравнения

$$\left(2 + \frac{1}{a_k}\right)\alpha_k(t) = 1,$$

$\gamma_{kn}(t) = \dfrac{1}{a_k}\,\alpha_k(t)$ при $t \in \left[t_k; \left(2^{k+1}-1\right)/2^{k+1}\right]$, непрерывна на $[0;1]$ и линейна на промежутках

$$\left[\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - \frac{|I_k^-|}{n}; \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}\right], \quad \left[\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}; t_k\right].$$

Отметим, что функции $\alpha_k(t)$ и $\gamma_{kn}(t)$ непрерывны на $[0;1]$, $|\gamma_{kn}(t)| \leqslant 1$ при $t \in [0;1]$, $\beta_k(t)$ разрывна на $[0;1]$ и $|\beta_k(t)| \leqslant 1$ при $t \in [0;1]$.

Пусть $\delta_k(t) = \alpha_k(t) + \beta_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $M \subset L_2(0,1)$ замкнутое подпространство в $L_2(0,1)$, натянутое на $\left(\delta_k(t)\right)$, и через p естественное отображение $p : L_2(0,1) \to L_2(0,1)/M$ на факторпространство. Мы будем рассматривать подпространства в $C^*(0,1)$, которые являются образом сопряженного оператора $(pi)^*$, где $i : C(0,1) \to L_2(0,1)$ – вложение. Так как в M все функции, кроме тождественного нуля, разрывны, то pi – инъективный оператор и, следовательно, $(pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^* \subset C^*(0,1)$ – тотальное подпространство. В теореме 4 мы вычислим характеристику этого подпространства.

Для нахождения характеристики $r\Big((pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^*\Big)$ достаточно вычислить верхнюю грань $||x||_C$, где x пробегает замыкание единичного шара в $C(0,1)$ по норме $||x||_1 = ||pix||$ и в правой части стоит норма в $L_2(0,1)/M$.

Лемма 1. *Если непрерывная функция $x(t)$ принадлежит замыканию единичного шара S_1 в $C(0,1)$ по норме $||\cdot||_1$, то для любой точки разрыва t_0 функций из M (такие точки пробегают счетное множество середин отрезков I_k) выполняется соотношение $|x(t_0)| \leqslant 1$.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $x(t_0) \geqslant 0$, если $x(t_0) < 0$, то рассуждения аналогичны. Итак, пусть $x(t_0) \geqslant 0$. Докажем, что $x(t_0) \leqslant 1$. Пусть, напротив, $x(t_0) > 1$. Тогда, в силу непрерывности $x(t)$, существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$x(t) > 1 + \alpha. \tag{3}$$

По условию существует последовательность непрерывных функций $\big(x_n(t)\big)$, $|x_n(t)| \leqslant 1$ такая, что $||x_n - x||_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что существует последовательность $\omega_n(t) \in M$ такая, что $||x_n - x - \omega_n|| \to 0$ по L_2-норме. Пусть t_0 является серединой I_k. Тогда сужение функции ω_n на I_k^+ имеет вид

$$\omega_n\big|_{I_k^+} = C_n\alpha_k(t). \tag{4}$$

Изучим поведение последовательности (C_n). Во-первых, (C_n) не может быть ограниченной последовательностью. Действительно, тогда из (3) следовало бы, что при $|t - t_0| < \delta$ и $t \in I_k$

$$x(t) - x_n(t) > \alpha. \tag{5}$$

Следовательно, из (4) и (5) вытекало бы существование такого малого δ_1, что при $t \in (t_0, t_0 + \delta_1)$ разность $x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)$ была бы больше некоторой фиксированной константы, что противоречит сходимости $||x_n - x - \omega_n|| \to 0$. Во-вторых, последовательность (C_n) не может быть и неограниченной. В самом деле, функция $x(t)$ непрерывна, значит ограничена на $[0;1]$. При условии неограниченности (C_n) из (4) следует, что разность $|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)|$ на множестве положительной меры из I_k^+ будет больше некоторой константы для бесконечного числа номеров n. А это противоречит сходимости $||x_n - x - \omega|| \to 0$.

Итак, последовательность (C_n) не может быть ни ограниченной, ни неограниченной. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 4. *Пусть* $a = \sup a_n$. *Тогда характеристика подпространства* $(pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^* \subset C^*(0,1)$ *находится следующим образом:*

$$r\Big((pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^*\Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \textit{при } a \in (0;1], \\ \dfrac{1}{2a+1} & \textit{при } a \in [1;\infty), \\ 0 & \textit{при } a = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем равносильное утверждение:

$$\sup\Big\{\|x\|_C :\ x \in \overline{S}_1\Big\} = \begin{cases} 3 & \text{при } a \in (0;1], \\ 2a+1 & \text{при } a \in [1;\infty), \\ \infty & \text{при } a = \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\overline{S}_1$ – замыкание единичного шара в $C(0,1)$ по норме $\|x\|_1 = \|pix\|_{L_2/M}$.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций $\big(x_k(t)\big)$, определенную следующим образом:

$$x_k(t) = \begin{cases} \beta_k(t) & \text{при } t \in I_k^-, \\ 1 & \text{при } t \in I_k^+ \bigcap(-\infty, t_0], \\ \left(2 + \dfrac{1}{a_k}\right)\alpha_k(t) & \text{при } t \in I_k^+ \bigcap[t_0, \infty), \\ 0 & \text{при } t \in [0;1] \setminus I_k. \end{cases}$$

Ясно, что $\sup\Big\{x_k(t) :\ t \in [0,1]\Big\} = 2a_k + 1$, т. е. $\|x_k\|_C = 2a_k + 1$. Покажем, что $x_k(t) \in \overline{S}_1$ для любого $k = 1, 2, \ldots$. Для этого проверим, что $\gamma_{kn}(t) \to x_k(t)$ при $n \to \infty$ для любого k по норме $\|\cdot\|_1$. Из построения γ_{kn} ясно, что мера

$$\mu\Big\{t :\ x_k(t) - \gamma_{kn}(t) \neq 2\delta_k(t)\Big\} = \frac{|I_k^-|}{n}. \tag{7}$$

Принимая во внимание ограниченность при фиксированном k функций $x_k(t)$, $\gamma_{kn}(t)$, $\delta_k(t)$, из (5) выводим сходимость $x_k(t) - \gamma_{kn}(t) - 2\delta_k(t) \to 0$ при $n \to \infty$ в $L_2(0,1)$. Так как $\delta_k(t) \in M$ при всех k, то имеем сходимость $\gamma_{kn}(t) \to x_k(t)$ при $n \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_1$, т. е. $x_k(t) \in \overline{S}_1$. Таким образом, показано, что

$$\sup\Big\{\|x\|_C :\ x \in \overline{S}_1\Big\} \geqslant 2a + 1. \tag{8}$$

Отсюда сразу следует последнее из равенств (6).

Теперь покажем, что выполнено второе из равенств (6). Итак, пусть $a \geqslant 1$. Вследствие (8) достаточно показать, что

$$\sup\Big\{\|x\|_C:\ x \in \overline{S}_1\Big\} \leqslant 2a+1. \tag{9}$$

Пусть, напротив, $\sup\Big\{\|x\|_C:\ x \in \overline{S}_1\Big\} > 2a+1$. Это означает, что найдется непрерывная функция $x(t) \in \overline{S}_1$ и $\|x\|_C > 2a+1$. Пусть $t^* \in [0;1]$ таково, что $x(t^*) > 2a+1$ (если $x(t^*) < 0$, то рассуждения аналогичны). Тогда найдутся $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$x(t) > 2a+1+\alpha \tag{10}$$

при $|t-t^*| < \delta$.

Существуют последовательности $\omega_n \in M$ и $z_n \in S_1$ в $C(0,1)$ такие, что

$$\|x - z_n - \omega_n\| \to 0 \tag{11}$$

в пространстве $L_2(0,1)$. Из (10) следует, что $x(t) - z_n(t) > 2a + \alpha$ при $|t-t^*| < \delta$, а из (9) – что найдется такой номер k_0, для которого коэффициент C_n из (2), начиная с некоторого номера $n = N$, удовлетворяет неравенству

$$C_n > 2 + \alpha_1, \tag{12}$$

$\alpha_1 > 0$ – некоторое число. (Здесь мы использовали условие $a \geqslant 1$.) Обозначим через t_0 середину отрезка I_{k_0}. В силу леммы 1 $x(t_0) \leqslant 1$, значит, в некоторой окрестности t_0 выполняется неравенство

$$x(t) < 1 + \frac{\alpha_1}{2},$$

из которого следует

$$x(t) - z_n(t) < 2 + \frac{\alpha_1}{2}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что в некоторой левой полуокрестности точки t_0 разность $x(t) - z_n(t) - \omega_n(t)$ будет больше некоторой фиксированной константы, что противоречит соотношению (11). Итак, доказано соотношение (9), что вместе с (8) влечет выполнимость второго равенства в (6). Осталось доказать первое равенство (6).

Пусть $a \in (0;1]$. Покажем, что

$$\sup\Big\{\|x\|_C:\ x \in \overline{S}_1\Big\} \geqslant 3. \tag{14}$$

Введем следующую последовательность функций:

$$\xi_n(t) = 0 \ \text{ при } \ t \in [0;1] \setminus \left[\frac{5n-2}{8n}; \frac{5n-1}{8n}\right], \quad \xi_n\left(\frac{10n-3}{16n}\right) = \beta_1\left(\frac{10n-3}{16n}\right),$$

ξ_n непрерывна на $[0;1]$ и линейна на промежутках $\left[\dfrac{5n-2}{8n};\ \dfrac{10n-3}{16n}\right]$. Пусть $y_m(t) = x_1(t) + 2\xi_m(t)$, $m = 2, 3, \ldots$. Покажем, что $y_m \in \overline{S}_1$. Действительно, выше мы показали, что $\gamma_{kn}(t) \to x_k(t)$ при $n \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_1$ для любого k. Возьмем $k = 1$, тогда $\gamma_{1n}(t) \to x_1(t)$ или $\gamma_{1n}(t) + 2\xi_m(t) \to y_m(t)$ для любого $m = 2, 3, \ldots$. Осталось только показать, что

$$\gamma_{1n}(t) + 2\xi_m(t) \in S_1. \tag{15}$$

Для произвольных m и n это не так, но из построения функций непосредственно видно, что при $n \geqslant m$ соотношение (15) выполняется. Этого достаточно для доказательства того, что $y_m \in \overline{S}_1$. Также из построения функций очевидно, что

$$\sup\Big\{\|y_m\|_C:\ m = 2, 3, \ldots\Big\} = 3.$$

Тем самым соотношение (14) доказано.

Покажем, что верно и обратное неравенство

$$\sup\Big\{\|x\|_C:\ x \in \overline{S}_1\Big\} \leqslant 3. \tag{16}$$

Последнее неравенство доказывается точно так же, как и (9) при $a = 1$. Тот факт, что в нашем случае $a \leqslant 1$, не влияет на доказательство. Теперь соотношения (14) и (16) доказывают первое равенство в (6). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $\sup a_n < \infty$, *то отображение* $(pi)^{-1}$ *регуляризуемо; если* $\sup a_n = \infty$, *то* $(pi)^{-1}$ *нерегуляризуемо.*

Доказательство следует из уже упоминавшегося утверждения: A^{-1} регуляризуемо в том и только в том случае, когда $A^*Y^* \subset X^*$ имеет ненулевую характеристику.

Теперь рассмотрим вопрос о регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам. Пусть $K(x,t)$ – непрерывная функция на квадрате $[0;1] \times [0;1]$. Рассмотрим интегральный оператор

$$Q: f(x) \to \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt, \tag{17}$$

действующий из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$, и интегральный оператор

$$Q': f(x) \to \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt,$$

действующий из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$.

Если Q' – инъективный оператор, то Q'^{-1} всегда регуляризуемо, так как гильбертово пространство рефлексивно. Совсем иная картина наблюдается для оператора Q: он может быть инъективным, но отображение Q^{-1} нерегуляризуемым.

Из теоремы 3 вытекает такой результат.

Следствие 2. *Если интегральный оператор $Q : C(0,1) \to L_2(0,1)$ инъективен и его продолжение на $L_2(0,1)$ имеет конечномерное ядро, то Q^{-1} регуляризуемо.*

Таким образом, мы видим, что регуляризуемость Q^{-1} связана со структурой ядра продолженного оператора. Если это ядро конечномерно, то Q^{-1} регуляризуемо, если ядро бесконечномерно, то Q^{-1} может быть нерегуляризуемым. Можно даже поставить вопрос: если ядро продолженного оператора бесконечномерно, то может ли отображение $(BA)^{-1}$ (в обозначениях теоремы 2) быть регуляризуемым? Положительный ответ на этот вопрос дается следствием к теореме 4. В этом следствии в любом случае (т. е. $\sup a_n < \infty$ или $\sup a_n = \infty$) ядро продолженного оператора $\ker p$ бесконечномерно. Отображение $(pi)^{-1}$ же может быть как регуляризуемым ($\sup a_n < \infty$), так и нерегуляризуемым ($\sup a_n = \infty$).

Мы здесь построим класс интегральных операторов из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с регуляризуемыми обратными отображениями и класс интегральных операторов из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с нерегуляризуемыми обратными отображениями. В обоих случаях продолжение операторов на $L_2(0,1)$ имеет бесконечномерное ядро. Мы увидим, что операторы могут быть выбраны с гладкими симметричными ядрами. Основная идея в наших рассмотрениях состоит в том, что можно построить интегральные операторы, инъективные из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$, но продолжение которых на $L_2(0,1)$ будет иметь ядром построенные в предыдущем параграфе подпространства M.

Рассмотрим следующие леммы. Через $C_0^\infty(a,b)$ обозначим множество всех финитных бесконечно дифференцируемых на промежутке $(a;b)$ функций.

Лемма 2. *Пусть $h(t) \in L_2(a,b)$ и*

$$H = \left\{ f(t) \in L_2(a,b) : \int_a^b f(t)h(t)\,dt = 0 \right\}.$$

Тогда $\overline{H \bigcap C_0^\infty(a,b)} = H$.

Доказательство. Множества

$$O_1 = \Big\{ f(t) \in L_2(a,b) : \int_a^b f(t)h(t)\,dt > 0 \Big\}$$

и

$$O_2 = \Big\{ f(t) \in L_2(a,b) : \int_a^b f(t)h(t)\,dt < 0 \Big\}$$

открыты и $H = \overline{O}_1 \bigcap \overline{O}_2$. Пусть $g \in H$ и $\varepsilon > 0$. Тогда, так как пересечение всюду плотного множества с открытым множеством в топологическом пространстве плотно в этом открытом множестве, финитные бесконечно дифференцируемые функции из O_1 и O_2 плотны в этих множествах. Следовательно, существуют $g_1 \in O_1 \bigcap C_0^\infty(a,b)$ и $g_2 \in O_2 \bigcap C_0^\infty(a,b)$ такие, что

$$||g_1 - g|| \leqslant \varepsilon \text{ и } ||g_2 - g|| \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Рассмотрим семейство $g_t = tg_1 + (1-t)g_2$, где $t \in [0;1]$. Для непрерывной функции $F : [0;1] \to \mathbb{R}$, определенной формулой

$$F(t) = \int_a^b g_t(x)h(x)\,dx,$$

выполняются соотношения $F(0) < 0$ и $F(1) > 0$, так как $g_1 \in O_1$ и $g_2 \in O_2$. Значит, существует $t_0 \in (0;1)$ такое, что $F(t_0) = 0$. Теперь, в силу (18), имеем

$$||g_{t_0} - g|| = ||t_0 g_1 + (1-t_0)g_2 - t_0 g - (1-t_0)g|| \leqslant$$
$$\leqslant t_0||g_1 - g|| + (1-t_0)||g_2 - g|| \leqslant \varepsilon,$$

а это и означает, что финитные бесконечно дифференцируемые функции из H плотны в H, так как $g_{t_0} \in H \bigcap C_0^\infty(a,b)$. Лемма доказана.

Теперь покажем, что финитные бесконечно дифференцируемые функции плотны не только в ортогональном дополнении к одной функции, но и в ортогональном дополнении к построенным выше подпространствам $M \subset L_2(0,1)$.

Лемма 3. *Пусть M – любое из построенных выше подпространств. Тогда в ортогональном дополнении N к M существует полная ортонормированная система $\{\psi_n(t)\}$ такая, что $\psi_n(t) \in C_0^\infty(0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что финитные бесконечно дифференцируемые функции из N плотны в N, так как в этом случае из них можно выбрать линейно независимую последовательность, ортогонализируя которую получаем нужную систему $\{\psi_n(t)\}$.

Итак, покажем, что $\overline{N \bigcap C_0^\infty(0,1)} = N$. Пусть $f \in N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем номер n так, чтобы

$$\int_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}^{1} f^2(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{19}$$

Поскольку функция $f(t)$ ортогональна функциям $\delta_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, в силу леммы 2 существует семейство $\{f_k(t) : k = 1, 2, \ldots, n\}$, для которого выполняются следующие условия:

$$\begin{array}{lll} 1) & f_k(t) \in C_0^\infty(I_k), & k = 1,2,\ldots,n; \\ 2) & \displaystyle\int_{I_k} f_k(t)\delta_k(t)\,dt = 0, & k = 1,2,\ldots,n; \\ 3) & \left\| f_k - f\big|_{I_k} \right\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}, & k = 1,2,\ldots,n, \end{array} \tag{20}$$

где через $f\big|_{I_k}$ обозначено сужение $f(t)$ на промежуток I_k. На промежутке $I_0 = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ существует функция $f_0 \in C_0^\infty\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ такая, что

$$\left\| f_0 - f\big|_{I_0} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(n+1)}.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} f_k(t) & \text{при } t \in I_k,\ k = 0,1,\ldots,n; \\ 0 & \text{при } t \in \left[\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}; 1\right]. \end{cases}$$

В силу условия (20) $g \in C_0^\infty(0,1)$, $g \in N$, так как для любого $k = 1, 2, \ldots$.

$$\int_0^1 g(t)\delta_k(t)\,dt = \int_{I_k} g(t)\delta_k(t)\,dt = 0,$$

а значит и для любого $m \in M$

$$\int_0^1 g(t)m(t)\,dt = 0.$$

Наконец, из соотношения

$$\|g - f\| = \sqrt{\int_0^1 (g-f)^2\,dt} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \int_{I_k} (g-f)^2\,dt + \frac{\varepsilon^2}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\int_{I_k} (g-f)^2\,dt} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

следует, что $\overline{N \bigcap C_0^\infty(0,1)} = N$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим интегральные операторы Q и Q' с ядром

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \psi_n(t), \tag{21}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ – произвольная ортонормированная система, состоящая из бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0;1]$ функций и

$$c_n = \frac{1}{\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \Big\{\max(|\varphi_n(x)|, \ldots, |\varphi_n^{(n)}(x)|)\Big\} \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Big\{\max(|\psi_n(x)|, \ldots, |\psi_n^{(n)}(x)|)\Big\} n^2}.$$

Ясно, что тогда $K(x,t)$ – бесконечно дифференцируемая функция на квадрате $[0;1] \times [0;1]$.

Теорема 5. *Пусть Q – интегральный оператор, построенный по формулам* (17), (21). *Тогда Q – инъективный оператор, и если* $\sup a_n < \infty$, *то отображение Q^{-1} регуляризуемо, а если* $\sup a_n = \infty$, *то Q^{-1} нерегуляризуемо.*

Доказательство. Вначале покажем, что $\ker Q' = M$. Действительно, если

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \psi_n(t) f(t) \right) dt = 0, \tag{22}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \varphi_n(x) = 0, \tag{23}$$

где

$$b_n = \int_0^1 f(t) \psi_n(t)\, dt$$

есть n-й коэффициент Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\psi_n(t)\}$, так как ряд в (22) по теореме Лебега можно почленно интегрировать. Из равенства (23) следует $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $f(t) \in M$. Ясно также, что из $f(t) \in M$ следует $f(t) \in \ker Q'$. Таким образом, доказано, что $\ker Q' = M$. Отсюда следует, во-первых, что Q – инъективный оператор и, во-вторых, что Q можно представить в виде произведения операторов

$$Q = Q'i = upi, \tag{24}$$

где $u \colon L_2(0,1)/M \to L_2(0,1)$ – инъективный оператор.

Пусть $\sup a_n = \infty$. Тогда по теореме 4 $(pi)^{-1}$ нерегуляризуемо. Значит, $(pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^*$ – подпространство нулевой характеристики, но из (24) следует

$$Q^*L_2^*(0,1) = (pi)^*u^*L_2^*(0,1) \subset (pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^*,$$

т. е. $Q^*L_2^*(0,1)$ тем более имеет нулевую характеристику, что влечет нерегуляризуемость отображения Q^{-1}.

Теперь пусть $\sup a_n < \infty$. Тогда по теореме 4 $(pi)^{-1}$ регуляризуемо, т. е. $(pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^*$ – подпространство ненулевой характеристики. Далее, ввиду рефлексивности $L_2(0,1)/M$ и инъективности оператора u, имеем $\overline{u^*L_2^*(0,1)} = \big(L_2(0,1)/M\big)^*$ и, следовательно,

$$\overline{Q^*L_2^*(0,1)} \supset (pi)^*\overline{u^*L_2(0,1)} = (pi)^*\big(L_2(0,1)/M\big)^*.$$

Это означает, что $\overline{Q^*L_2^*(0,1)}$, а стало быть и $Q^*L_2^*(0,1)$, – подпространства ненулевой характеристики, что влечет регуляризуемость Q^{-1}. Теорема доказана.

Заметим, что можно считать, что оператор Q имеет симметричное ядро. Для этого достаточно положить $\varphi_n(x) = \psi_n(x),\ \ n = 1, 2, \ldots.$

Таким образом, мы нашли класс интегральных операторов из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$, для которых обратные отображения регуляризуемы, и класс интегральных операторов из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$, для которых обратные отображения нерегуляризуемы. В обоих случаях продолжение операторов на $L_2(0,1)$ имеет бесконечномерное ядро.

Теперь применим теорему 3 для более глубокого изучения связи регуляризуемости с ядром продолженного оператора.

Для этого рассмотрим некоторую конструкцию пространства E_2. Пусть $\{F_\alpha,\ \alpha \in I\}$ – семейство полурефлексивных пространств, $E_1 \subset F_\alpha$ для всех $\alpha \in I$; причем множество индексов I является направленным отношением «$\leqslant$»: $\alpha \leqslant \beta \iff F_\beta \subset F_\alpha$. Через $g_{\alpha\beta}$ для $\alpha \leqslant \beta$ обозначим вложение $g_{\alpha\beta}\colon F_\beta \to F_\alpha$, которое предполагается непрерывным. Пространство E_2 определим как проективный предел пространств F_α относительно отображений $g_{\alpha\beta}\colon E_2 = \varprojlim g_{\alpha\beta}F_\beta$.

Ясно, что множество E_2 представляет собой пересечение $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$, а топология E_2 мажорирует топологию F_α для всех $\alpha \in I$. Точнее, топология E_2 является слабейшей из всех, которые мажорируют все топологии F_α.

Теперь обратимся к классическому вопросу о регуляризуемости отображений, обратных к операторам $A\colon C(0;1) \to L_2(0;1)$. Вначале рассмотрим леммы.

Лемма 4. *Пусть (c_n) – последовательность положительных чисел со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$. Тогда найдется последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\delta_n$ расходится.*

Доказательство. Рассмотрим любой сходящийся ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Далее выберем последовательность номеров (n_k) так, чтобы для всех k выполнялось неравенство

$$c_{n_k} \geqslant k^2. \tag{25}$$

Теперь определим последовательность (δ_n) следующим образом:

$$\delta_n = \begin{cases} \alpha_n, & \text{если } n \neq n_k, \\ \dfrac{1}{c_{n_k}}, & \text{если } n = n_k. \end{cases}$$

Тогда из (25) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\delta_n$ расходится, так как имеет бесконечно много членов, равных единице.

Обозначим через μ стандартную меру Лебега на $(0;1)$.

Лемма 5. *Для любой функции $f(x) \notin L_\infty(0;1)$ (т. е. не являющейся существенно ограниченной) существует абсолютно непрерывная мера ν на отрезке $[0;1]$, относительно которой мера μ также абсолютно непрерывна и такая, что $f(x) \notin L_1(\nu)$.*

Доказательство. Ввиду того что $f(x)$ не является существенно ограниченной, существует возрастающая последовательность положительных чисел (c_n) такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ и

$$\mu(c_n < |f| \leqslant c_{n+1}) = \omega_n \neq 0. \tag{26}$$

Обозначим через A_n множество $\{x : c_n < |f| \leqslant c_{n+1}\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Заметим, что $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

В силу леммы 4 существует последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty, \quad \text{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\delta_n = \infty. \tag{27}$$

Теперь определим меру ν.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin A, \\ \dfrac{\delta_n}{\omega_n}, & \text{если } x \in A_n. \end{cases}$$

Из (26) и первого соотношения (27) следует, что $\varphi_1(x) \in L_1(\mu)$. Теперь для произвольного измеримого множества $B \subset [0;1]$ положим

$$\nu(B) = \int_B \varphi_1(x)\, d\mu. \qquad (28)$$

Тогда из (28) сразу следует, что мера ν абсолютно непрерывна, а из второго соотношения (27) – что $f(x) \notin L_1(\nu)$. Осталось показать, что мера μ абсолютно непрерывна относительно ν. Но это следует из того, что для функции

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin A, \\ \dfrac{\omega_n}{\delta_n}, & \text{если } x \in A_n, \end{cases}$$

$$\mu(B) = \int_B \varphi_2(x)\, d\nu.$$

Следствие 3. *Для любой функции $f(x) \notin L_\infty(0;1)$ существует абсолютно непрерывная мера ν на $[0;1]$, относительно которой мера μ также абсолютно непрерывна и такая, что $f(x) \notin L_2(\nu)$.*

Теорема 6. *Пусть линейное уплотнение $C:\ C(0;1) \to L_2(0;1)$ таково, что оно непрерывно по L_2-норме и продолжение оператора C по непрерывности на $L_\infty(0;1)$ имеет конечномерное ядро. Тогда отображение C^{-1} регуляризуемо.*

Доказательство. Применим теорему 3, положив $E_1 = C(0;1)$, $E_3 = L_2(0;1)$, $E_2 = \varprojlim g_{\alpha\beta} F_\beta$, где $F_\beta = L_2(\beta)$, β – абсолютно непрерывная мера, относительно которой мера Лебега μ также абсолютно непрерывна. Сразу заметим, что E_2 – полурефлексивное пространство как проективный предел рефлексивных пространств. Здесь применима описанная выше схема построения E_2 в виде проективного предела. В самом деле, все рассматриваемые меры абсолютно непрерывны друг относительно друга, значит определены вложения $g_{\alpha\beta}\colon L_2(\beta) \to L_2(\alpha)$. Напомним, что элемент $L_2(\nu)$ – это класс функций, но здесь классы совпадают, так как множества меры нуль совпадают по разным мерам. Непрерывность вложений легко следует из неравенства

$$\varphi_\alpha(x) \leqslant C\varphi_\beta(x), \tag{29}$$

где $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\beta(x)$ – плотности мер α и β соответственно, выполняющегося почти всюду.

Покажем справедливость неравенства (29). Пусть, напротив, оно неверно. Тогда существует возрастающая последовательность чисел (c_n) такая, что $c_n \to \infty$, а неравенство

$$\varphi_\alpha(x) > c_n\varphi_\beta(x) \tag{30}$$

выполняется на множестве A_n положительной меры. Положим $H_n = A_n \backslash A_{n+1}$. Ясно, что можно так выбрать (c_n), чтобы $\mu(H_n) = \omega_n > 0$. В силу леммы 4 существует последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty, \quad \text{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\delta_n = \infty. \tag{31}$$

Теперь рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\int_{H_n} \varphi_\beta(x)\,dx}}\sqrt{\delta_n} & \text{при } x \in H_n, \\ 0 & \text{при } x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n. \end{cases}$$

Из (30) и (31) следует, что $f(x) \in L_2(\beta)$, но $f(x) \notin L_2(\alpha)$, а это противоречит вложению $L_2(\beta) \subset L_2(\alpha)$. Неравенство (29) доказано.

Представим оператор C в виде произведения $C = BA$, где $A\colon C(0;1) \to$ $\to E_2$ – вложение и $B\colon E_2 \to L_2(0;1)$ – продолжение C по непрерывности. Из условия сразу следует непрерывность B. То, что $A^{-1}\big|_{A(E_1)}$ – B-измеримое отображение первого класса, следует из известной регуляризуемости обратного отображения для вложения $i:\ C(0;1) \to L_2(0;1)$. Из следствия леммы 5 следует совпадение множеств $E_2 = L_\infty(0;1)$. Таким образом, теорема 6 следует из теоремы 3. Теорема доказана.

Следствие 4. *Если интегральный оператор $A\colon C(0;1) \to L_2(0;1)$ инъективен и его продолжение на $L_\infty(0;1)$ имеет конечномерное ядро, то A^{-1} регуляризуемо.*

Из теоремы 3 вытекает, что если продолжение интегрального оператора A на некоторое $L_p(0,1)$ имеет конечномерное ядро, то A^{-1} регуляризуемо. Покажем, что следствие 4 сильнее этого результата. Для этого достаточно показать следующее.

Теорема 7. *Существует инъективный интегральный оператор* $A\colon C(0,1)\to$ $\to L_2(0,1)$*, продолжение которого на любое* $L_p(0,1)$ *имеет бесконечномерное ядро, а ядро продолжения* A *на* $L_\infty(0,1)$ *конечномерно.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.

Литература

1. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
2. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
3. Винокуров В. А. Общие свойства погрешности приближенного решения линейных функциональных уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1971. Т. 11, № 1. С. 22–28.
4. Винокуров В. А. О понятии регуляризуемости разрывных отображений // Там же. Т. 11, № 5. С. 1097–2013.
5. Винокуров В. А., Петунии Ю. И., Пличко А. Н. Условия измеримости и регуляризуемости отображений, обратных к непрерывным линейным отображениям // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 509–511.
6. Винокуров В. А., Пличко А. Н. О регуляризуемости линейных обратных задач линейными методами // Там же. 1976. Т. 229, № 5. С. 1037–1040.
7. Винокуров В. А., Менихес Л. Д. Необходимое и достаточное условие линейной регуляризуемости // Там же. 1976. Т. 229, № 6. С. 1292–1294.
8. Винокуров В. А., Доманский Е. Н., Менихес Л. Д. и др. О некоторых проблемах линейной регуляризуемости // Там же. 1983. Т. 270, № 1. С. 31–34.
9. Петунии Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. Киев: Вища шк., 1980.
10. Менихес Л. Д. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 2. С. 282–285.
11. Менихес Л. Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 222–229.
12. Менихес Л. Д. Об одном условии регуляризуемости интегральных уравнений // Изв. Челяб. науч. центра УрО РАН. 2001. Вып. 3(12). С. 1–4.
13. Менихес Л. Д. К теории регуляризации неустойчивых задач // Там же. 2002. Вып. 3(16). С. 1–5.
14. Менихес Л. Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 2. С. 242–247.

Статья поступила 05.01.2008 г.